

АНДРЕЈА ТОДОРОВИЋ¹,
НОВИЦА РАКИЋЕВИЋ²,
БРАНИМИР ГРГУР³

Стручни рад
UDC:53.082.75.001.573:546.226-325=861

Формирање апроксимационих диференцијалних једначина за одређивање електричне и моларне проводљивости воденог раствора сумпорне киселине

У раду је обрађена проблематика формирања система апроксимационих линеарних диференцијалних једначина за приближно израчунавање електричне и моларне проводљивости воденог раствора сумпорне киселине. Показано је како се на основу података експерименталних мерења наведених величина врши постављање апроксимационих линеарних диференцијалних једначина или њихових система, који практично описују динамику процеса и осбине електрохемијског система. Решавањем тако постављених једначина методом Рунге-Куте четвртог реда помоћу одговарајућих функција Матлаб рачунарских програмских пакета, добијају се одговарајуће карактеристике погодне за анализу режима рада и испитивање утицаја параметара на особине система. Добијени резултати у виду нумеричких вредности променљивих, су веома прецизни, поуздани и задовољавајући за праксу и истраживања, а остварују се за релативно кратко време. Све то оправдава овакав приступ и примену методе путем формирања апроксимационих диференцијалних једначина за решавање ових и сличних питања.

1. УВОД

На основу доступних литературних информација из области електрохемије [1 - 7], аутори овог рада није познато како се на основу експерименталних података могу формирати системи диференцијалних једначина за одређивање карактеристика електрохемијских система. То питање је обрађено на примеру одређивања електричне моларне проводљивости електрохемијског проводног система воденог раствора сумпорне киселине.

Показано је како се на основу података експерименталних мерења електричне проводљивости, а затим израчунавања одговарајућих моларних проводљивости воденог раствора сумпорне киселине при разним концентрацијама и температури од 18 °С, могу формирати системи њихових апроксимационих линеарних диференцијалних једначина првог реда са две или више једначина, чијим се решавањем помоћу одговарајућих функција Матлаб рачунарских

програмских пакета [8, 9] добијају приближне вредности наведених величина. Добијени резултати се релативно добро слажу са експерименталним [1, 6, 7], што оправдава овакав приступ и примену наведене методе за решавање овог питања у пракси и истраживањима. Наиме, упоређивањем експерименталних са добијеним подацима, који су у виду нумеричких вредности променљивих дате таблично и графички, може се констатовати да су добијени подаци задовољавајући и за праксу и за истраживања. С тога се овом питању треба посветити посебна пажња.

Наведено оправдање о примени методе путем формирања одговарајућих диференцијалних једначина или њихових система за приближно одређивање електричне и моларне проводљивости наведеног електролита, показано је на основу остварених релативних грешака. Наиме, те грешке су биле минималне, па се тако добијени резултати и метода могу сматрати прихватљивим за примену. На овај начин аутори овог рада су направили покушај и дали свој скроман допринос решавању наведеног питања, стим што се може истаћи да се овакав приступ може применити за решавање и сличних проблематика у области електрохемије.

Адреса аутора: ¹Факултет техничких наука, Косовска Митровица, ²Природно-математички факултет, Косовска Митровица, ³Технолошко-металуршки факултет, Београд

2. ФОРМИРАЊЕ СИСТЕМА АПРОКСИМАЦИОНИХ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИХ ЈЕДНАЧИНА ЗА ОДРЕЂИВАЊЕ ЕЛЕКТРИЧНЕ И МОЛАРНЕ ПРОВОДЉИВОСТИ ЕЛЕКТРОЛИТА

Код електролита - проводника друге врсте, разликује се електрична проводљивост (означава се са: κ) и моларна проводљивост (означава се са: λ). За ове електрохемијске проводне системе електричне струје, електрична проводљивост представља уствари њихову специфичну електричну проводљивост.

Електрична проводљивост електролита зависи од више величина: концентрације, степена дисоцијације, наелектрисања и степена покретљивости, температуре итд. Међутим, да би се избегао утицај концентрације при поређењу електролита у погледу њихове способности да проводе електричну струју, јер утицај концентрације је чини непогодном величином за наведено упоређивање, уведен је појам моларне проводљивости електролита, који се дефинише се следећом једначином [1-5]:

$$\lambda = \frac{\kappa}{c}, \quad (1)$$

где је: λ - моларна проводљивост електролита, која се изражава у $S \text{ m}^2 \text{ mol}^{-1}$, κ - електрична проводљивост електролита, која се изражава у S/m и c - концентрација електролита, која се изражава у mol m^{-3} .

Када се употребљава појам мола, неопходно је навести врсту елементарних честица, јер ове честице могу бити: атоми, молекули, јони, електрони, као и друге честице или специјалне групе ових честица [1-5]. Мол било ког електролита је количина супстанце која при растварању даје у раствор $e \cdot L$ и $- e \cdot L$ наелектрисања које носе настали јони, где је: e - наелектрисање протона, а L - Авогардова константа, која износи $6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

За практичне сврхе и научна истраживања у области електрохемије, од посебне је важности формирати систем линеарних диференцијалних једначина првог или вишег реда, са две или више једначина, за одређивање електричне и моларне проводљивости електрохемијског проводног система воденог раствора сумпорне киселине. Тако формиран систем линеарних диференцијалних једначина представља математички модел наведеног електрохемијског проводног система електричне струје, који практично описује динамику процеса односно дина-

мичке особине система. С обзиром да у наведеном систему диференцијалних једначина фигуришу први или виши изводи непознатих функција електричне и моларне проводљивости воденог раствора сумпорне киселине, као и саме функције наведених величина и њихови аргументи – концентрације, то ће се њиховим решавањем, управо, добити наведене функције, које практично представљају карактеристике система. Помоћу тако добијених карактеристика система, може се извршити анализа њиховог режима рада, испитати утицај концентрације или ма које друге величине на електричну и моларну проводљивост и особине електролита, одредити брзина хемијских реакција, као што су естерификација, сапонификација, диазотовање итд [1-5].

Формирање система линеарних диференцијалних једначина за одређивање електричне и моларне проводљивости разматраног електролита, може се извршити на два начина: на основу одговарајућих физичких законитости и апроксимационом методом на основу експерименталних мерења [1,6,7], при чему су добијени резултати задовољавајући и за праксу и за истраживања. Решавање диференцијалних једначина или њихових система може се извршити разним методама, али се најчешће користи метода Рунге-Кута четвртог реда и то помоћу одговарајућих функција Матлаб рачунарских програмских пакета [8-9]. У том случају, ако формиран систем линеарних диференцијалних једначина разматраног електрохемијског проводног система воденог раствора сумпорне киселине, кога у овом случају чине две линеарне диференцијалне једначине, садржи једну или обе диференцијалне једначине другог или вишег реда, онда се те једначине одговарајућим заменама свде на линеарне првог реда, па се тиме добија систем линеарних диференцијалних једначина првог реда са више од две једначине. Наведено свођење система линеарних диференцијалних једначина вишег реда на систем линеарних диференцијалних једначина првог реда, врши се зато што је Матлаб рачунарски програм прилагођен да може решавати само такве системе једначина. С друге стране, тако добијени резултати, који се иначе дају у виду нумеричких вредности променљивих, су веома прецизни и поуздани, а остварују се за релативно кратко време.

На основу овога, ако формиран систем линеарних диференцијалних једначина за одређивање електричне и моларне проводљивости раз-

матраног електрохемијског проводног система воденог раствора сумпорне киселине садржи обе једначине првог реда, онда се он даје у следећем облику:

$$\begin{aligned} \kappa'_i &= \kappa'_i(c, \kappa_i, \lambda_i) \\ \text{и} & \\ \lambda'_i &= \lambda'_i(c, \kappa_i, \lambda_i), \end{aligned} \quad (2)$$

где су: $\kappa'_i = \kappa'_i(c)$, $\lambda'_i = \lambda'_i(c)$ - први изводи функција електричне и моларне проводљивости воденог раствора сумпорне киселине, респективно, $\kappa_i = \kappa_i(c)$, $\lambda_i = \lambda_i(c)$ - функције електричне и моларне проводљивости воденог раствора сумпорне киселине, респективно и c - концентрација наведеног електролита.

Међутим, ако формиран систем линеарних диференцијалних једначина за одређивање електричне и моларне проводљивости разматраног електрохемијског проводног система воденог раствора сумпорне киселине садржи, на пример, једну једначину трећег реда, а другу једначину петог реда, онда, након њиховог свођења одговарајућим заменама на линеарне диференцијалне једначине првог реда, добија се систем линеарних диференцијалних једначина првог реда од осам једначина. Тако добијен систем линеарних диференцијалних једначина првог реда са осам једначина, даје се у следећем облику:

$$\begin{aligned} \kappa'_1 &= \kappa'_1(c, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \lambda_1 \lambda_2 \dots, \lambda_5), \\ \kappa'_2 &= \kappa'_2(c, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \lambda_1 \lambda_2 \dots, \lambda_5), \\ \kappa'_3 &= \kappa'_3(c, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \lambda_1 \lambda_2 \dots, \lambda_5), \\ \lambda'_1 &= \lambda'_1(c, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \lambda_1 \lambda_2 \dots, \lambda_5), \\ \lambda'_2 &= \lambda'_2(c, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \lambda_1 \lambda_2 \dots, \lambda_5), \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \lambda'_5 &= \lambda'_5(c, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \lambda_1 \lambda_2 \dots, \lambda_5) \end{aligned} \quad (3)$$

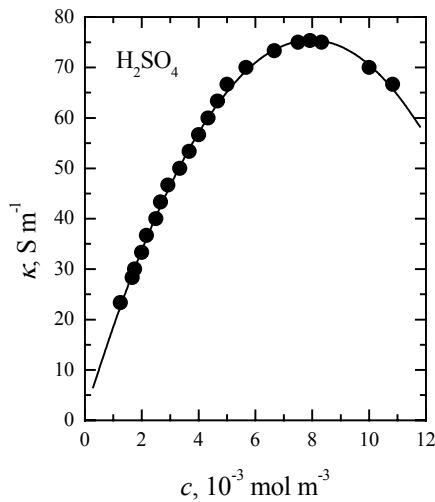
Што се формирања система апроксимационих линеарних диференцијалних једначина за приближно одређивање електричне и моларне проводљивости електрохемијског проводног система наведеног електролита тиче, може се рећи да се и овај систем једначина такође своди

на облик система једначина (2) или (3), зависно од тога ког су реда апроксимационе линеарне диференцијалне једначине садржане у том систему. Формирање овог система апроксимационих линеарних диференцијалних једначина врши се тако, што се најпре на основу података експерименталних мерења електричне проводљивости и концентрације разматраног електролита одреде њихове одговарајуће моларне проводљивости, а онда најбоље полиномне апроксимационе карактеристике функција електричне и моларне проводљивости. Апроксимационе карактеристике функција електричне и моларне проводљивости одређују се апроксимационом методом најмањих квадрата у виду полинома оног степена за који се добијају најбоље апроксимације, односно најбоља слагања апроксимационих са измереним вредностима.

Ако је за разматрани електрохемијски проводни систем воденог раствора сумпорне киселине добијен систем апроксимационих линеарних диференцијалних једначина првог реда, али да се састоји од две апроксимационе линеарне диференцијалне једначине, то значи да су претходно одређене одговарајуће апроксимационе карактеристике функција њихове електричне и моларне проводљивости полиноми највише до трећег степена. Међутим, ако су апроксимационе карактеристике функција електричне и моларних проводљивости разматраног електролита полиноми чији су степени већи од три, онда се оне диференцирају онолико пута док се не добију њихови изводи у виду полином трећег степена. У том случају се добија систем апроксимационих линеарних диференцијалних једначина такође од две једначине, али вишег реда, који се затим одговарајућим заменама своди на систем апроксимационих линеарних диференцијалних једначина првог реда са више од две једначине. И коначно се може рећи, да се тек тако добијени систем апроксимационих линеарних диференцијалних једначина првог реда, било да се састоји од две или више једначина, може решавати у Маглаб рачунарском програму, који је прилагођен да може решавати само такве системе једначина.

3. РЕЗУЛТАТИ

Експериментални подаци измерених вредности електричне проводљивости и концентрације за водени раствор сумпорне киселине при температури од 18°C [1], дати су графички на слици 1.



Слика 1 - Зависност електричне проводљивости од концентрације за водени раствор сумпорне киселине при температури од 18 °C

На основу података експерименталних мерења датим на слици 1 и према једначини (1) одређена је моларна проводљивости за водени раствор сумпорне киселине при разним концентрацијама и температури од 18°C, чије су израчунате вредности дате у табели 1.

Табела 1 - Експериментални подаци измерених вредности електричне проводљивости [1] и израчунате вредности моларне проводљивости воденог раствора сумпорне киселине при разним концентрацијама и температури од 18 °C

$c, 10^{-3}\ mol\ m^{-3}$	$\kappa_1, S\ m^{-1}$	$\lambda_1, S\cdot m^2\ mol^{-1}$
1.2500	23.3330	18666.40
1.6666	28.3330	17000.48
1.7500	30.0000	17142.86
2.0000	33.3330	16666.50
2.1666	36.6660	16923.29
2.5000	40.0000	16000.00
2.6666	43.3330	16250.28
2.9166	46.6660	16000.14
3.3333	50.0000	15000.15
3.6666	53.3330	14545.63
4.0000	56.6660	14166.50
4.3333	60.0000	13846.26
4.6666	63.3330	13571.55
5.0000	66.6660	13333.20
5.6666	70.0000	12353.09
6.6666	73.3330	11000.06
7.5000	75.0000	10000.00
7.9166	75.3330	9515.83
8.3333	75.0000	9000.04
10.0000	70.0000	7000.00
10.8333	66.6660	6153.80

Са подацима датим у табели 1, одређују се најбоље апроксимације електричне и моларне проводљивости воденог раствора сумпорне киселине, која се добијају у виду полинома четвртог степена за оба величине, што је графички приказано на слици 2. и слици 3, респективно. На наведеним сликама, апроксимационе карактеристике функција електричне и моларне проводљивости разматраног електролита, $\kappa_{1a} = \kappa_{1a}(c)$ и $\lambda_{1a} = \lambda_{1a}(c)$, приказане су пуним линијама; док су измерене вредности функције електричне проводљивости $\kappa_1 = \kappa_1(c)$ и израчунате вредности функције моларне проводљивости $\lambda_1 = \lambda_1(c)$, иначе узете из табеле 1, приказане звездицама.

Ради погодности и математичког усаглашавања са ознакама у Матлаб рачунарском програму, уводе се следеће ознаке за функције електричне и моларне проводљивости воденог раствора сумпорне киселине: $y_{1a} = \kappa_{1a}$, $y_{2a} = \lambda_{1a}$ – за апроксимационе карактеристике функција електричне и моларне проводљивости, респективно и $y_1 = \kappa_1$, $y_2 = \lambda_1$ – за функције електричне и моларне проводљивости, респективно.

Одговарајуће апроксимационе карактеристике наведених функција, дају се следећим једначинама:

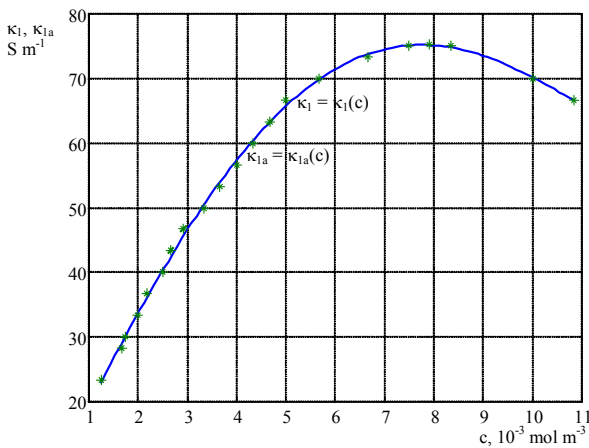
$$y_{1a} = y_{1a}(c) = \kappa_{1a} = \kappa_{1a}(c) = c_{11} c^4 + c_{12} c^3 + c_{13} c^2 + c_{14} c + c_{15} \tag{4}$$

и

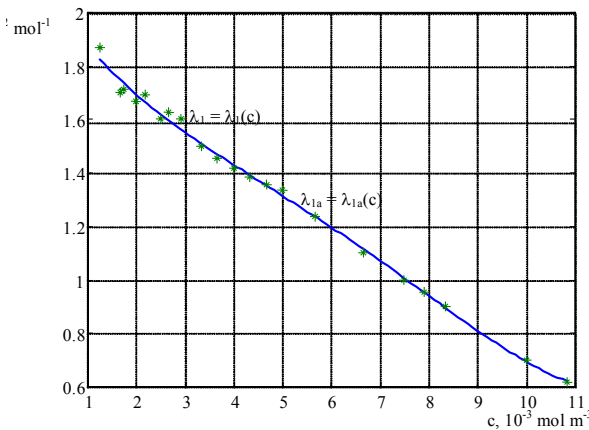
$$y_{2a} = y_{2a}(c) = \lambda_{1a} = \lambda_{1a}(c) = c_{21} c^4 + c_{22} c^3 + c_{23} c^2 + c_{24} c + c_{25} \tag{5}$$

где су: $y_{1a} = y_{1a}(c) = \kappa_{1a} = \kappa_{1a}(c)$, $y_{2a} = y_{2a}(c) = \lambda_{1a} = \lambda_{1a}(c)$ – апроксимационе карактеристике функција електричне и моларне проводљивости разматраног електролита и $c_{11}, c_{12}, \dots, c_{16}, c_{21}, c_{22}, \dots, c_{25}$ - константни коефицијенти пропорционалности апроксимационих карактеристика функција електричне и моларне проводљивости разматраног електролита.

Нумеричке вредности апроксимационих карактеристика функција електричне и моларне проводљивости воденог раствора сумпорне киселине, одређене у 10 тачака на подједнаким растојањима изабраног интервала концентрације c [$1.25 \cdot 10^{-3} - 1.0833 \cdot 10^{-2}$], дате су у табели 2.



Слика 2 - График апроксимационе и експерименталне карактеристике функције електричне проводљивости воденог раствора сумпорне киселине



Слика 3 - График апроксимационе и експерименталне карактеристике функције моларне проводљивости воденог раствора сумпорне киселине

Табела 2 - Нумеричке вредности апроксимационих карактеристика функција електричне и моларне проводљивости воденог раствора сумпорне киселине

$c, 10^{-3} \text{ mol m}^{-3}$	$y_{1a} = \kappa_{1a}, \text{ S m}^{-1}$	$y_{2a} = \lambda_{1a}, \text{ S} \cdot \text{m}^2 \text{ mol}^{-1}$
1.2500	22.9845	18251.89
2.3148	37.9616	16442.14
3.3796	50.9402	15025.62
4.4444	61.3802	13778.23
5.5092	68.9487	12546.54
6.5741	73.5200	11247.75
7.6389	75.1757	9869.70
8.7037	74.2043	8470.89
9.7685	71.1018	7180.45
10.8333	66.5715	6198.18

Даљим диференцирањем једначина (4 и 5) до добијања њихових извода у виду полинома трећег степена, добијају се први изводи наведених функција, који се дају следећим једначинама:

$$y'_{1a} = y'_{1a}(c) = \kappa'_{1a} = \kappa'_{1a}(c) \quad (6)$$

и

$$y'_{2a} = y'_{2a}(c) = \lambda'_{1a} = \lambda'_{1a}(c) \quad (7)$$

Затим се једначине (6 и 7) још једном диференцирају, да би се са тако добијеним изводима наведених функција у виду полинома другог степена и изводима истих функција датим једначинама (6 и 7) могло извршити формирање два система апроксимационих линеарних алгебарских једначина од по три једначине са три непознате. Тада се добија следеће:

$$y''_{1a} = y''_{1a}(c) \quad (8)$$

и

$$y''_{2a} = y''_{2a}(c). \quad (9)$$

Сада се са једначинама (6, 7, 8 и 9) формирају два комбинацијама два система апроксимационих линеарних алгебарских једначина од по три једначинеса са три усвојене непознате и то: c^3 , c^2 и c . Први систем апроксимационих линеарних алгебарских једначина од три једначине, чине једначине (6, 7 и 8); док други систем таквих једначина, чине једначине (6, 7 и 9).

Добијени системи апроксимационих линеарних алгебарских једначина, могу се решити по било којој непознатој. Међутим, довољно је те системе једначина решити по једној непознатој, на пример по c^3 , а онда из тако добијених решења за c^3 изразити тражене једначине система апроксимационих линеарних диференцијалних једначина, које су у овом случају вишег реда, тачније другог реда. За узети пример разматраног електролита, добијени систем апроксимационих линеарних диференцијалних једначина вишег реда, тј. у овом случају другог реда, даје се у следећем облику:

$$\begin{aligned}
y''_{1a} &= \kappa''_{1a} = 3.8945169 \cdot 10^{12} \cdot c^3 + 1.6207291 \cdot 10^2 \cdot y'_{1a} - \\
&- 9.005908 \cdot 10^{-1} \cdot y'_{2a} - 5.2977703 \cdot 10^6 = \\
&3.8945169 \cdot 10^{12} \cdot c^3 + 1.6207291 \cdot 10^2 \cdot \kappa'_{1a} - \\
&- 9.005908 \cdot 10^{-1} \cdot \lambda'_{2a} - 5.2977703 \cdot 10^6 = \\
&= y''_{1a}(c, y'_{1a}, y'_{2a}) = \kappa''_{1a}(c, \kappa'_{1a}, \lambda'_{1a}), \\
y''_{2a} &= \lambda''_{2a} = 1.296252 \cdot 10^{15} \cdot c^3 + \\
&+ 6.7398269 \cdot 10^4 \cdot y'_{1a} - 3.392141 \cdot 10^2 \cdot y'_{2a} - \\
&- 1.066108 \cdot 10^9 = 1.296252 \cdot 10^{15} \cdot c^3 + \\
&+ 6.7398269 \cdot 10^4 \cdot y'_{1a} - 3.392141 \cdot 10^2 \cdot y'_{2a} - \\
&- 1.066108 \cdot 10^9 = y''_{2a}(c, y'_{1a}, y'_{2a}) = \lambda''_{2a}(c, \kappa'_{1a}, \lambda'_{1a})
\end{aligned} \tag{10}$$

С обзиром да је претходно добијени систем апроксимационих линеарних диференцијалних једначина (10) вишег реда, тачније другог реда, неопходно је да се одговарајућим заменама сведе на систем апроксимационих линеарних диференцијалних једначина првог реда. Тако добијени систем апроксимационих линеарних диференцијалних једначина првог реда, имаће у овом случају укупно четири једначине облика система једначина (3), који се даје у следећем облику:

$$\begin{aligned}
y'_{1a} &= y'_{1a}(c, y_{1a}, y_{2a}, y_{3a}, y_{4a}), \\
y'_{2a} &= y'_{2a}(c, y_{1a}, y_{2a}, y_{3a}, y_{4a}) \\
y'_{3a} &= y'_{3a}(c, y_{1a}, y_{2a}, y_{3a}, y_{4a}) \\
y'_{4a} &= y'_{4a}(c, y_{1a}, y_{2a}, y_{3a}, y_{4a}).
\end{aligned} \tag{11}$$

Увођењем погодних замена за снижење реда система апроксимационих линеарних диференцијалних једначина вишег реда (10), тај систем једначина се своди на следеће једначине:

$$\begin{aligned}
y'_{1a} &= p, & y''_{1a} &= p' = y''_{1a}(c, y'_{1a}, y'_{2a}), \\
y'_{2a} &= k, & y''_{2a} &= k' = y''_{2a}(c, y'_{1a}, y'_{2a}).
\end{aligned}$$

где је добијено четири новоформираних апроксимационих линеарних диференцијалних једначина првог реда, чији су први изводи њихових функција: y'_{1a} , p' , y'_{2a} и k' .

Затим се уведе погодне замене за четири претходно новодобијене прве изводе функција и то у складу са ознакама и редоследу како је дато у систему апроксимационих линеарних диференцијалних једначина првог реда (11). Тада се добија следеће:

$$\begin{aligned}
y'_{1a} &= y'_{1a}, & \text{одакле је: } & y_{1a} = y_{1a}, \\
y'_{2a} &= p', & \text{одакле је: } & y_{2a} = p, \\
y'_{3a} &= y'_{2a}, & \text{одакле је: } & y_{3a} = y_{2a}, \\
y'_{4a} &= k', & \text{одакле је: } & y_{4a} = k,
\end{aligned}$$

где су са леве стране ознаке новоформираних првих извода функција и самих функција, које су узете сагласно ознакама и редоследу како је дато у систему апроксимационих линеарних диференцијалних једначина (11). Уочљиво је да су се уведена ознака за први извод прве функције y'_{1a} , као и за саму функцију y_{1a} , случајно поклопила са ознаком првог извода прве функције од четири претходно новоформираних првих извода функција.

На основу претходно усвојених замена, добија се следеће:

$$\begin{aligned}
y'_{1a} &= y'_{1a} = p = y_{2a}, \\
y'_{2a} &= p' = y''_{1a} = y''_{1a}(c, y'_{1a}, y'_{2a}), \\
y'_{3a} &= y'_{2a} = k = y_{4a}, \\
y'_{4a} &= k' = y''_{2a} = y''_{2a}(c, y'_{1a}, y'_{2a}).
\end{aligned} \tag{12}$$

С обзиром да се из претходно добијеног система апроксимационих линеарних диференцијалних једначина првог реда (12) има следеће:

$$y'_{1a} = p = y_{2a} \quad \text{и} \quad y'_{2a} = k = y_{4a},$$

то се заменом y'_{1a} са y_{2a} и y'_{2a} са y_{4a} у другој и четвртој једначини система апроксимационих линеарних диференцијалних једначина првог реда (12), тај систем једначина своди на облик система апроксимационих линеарних диференцијалних једначина првог реда (11). Значи, коначан облик система апроксимационих линеарних диференцијалних једначина првог реда за одређивање електричне и моларне проводљивости разматраног електрохемијског проводног система воденог раствора сумпорне киселине, је следећи:

$$\begin{aligned}
y'_{1a} &= y_{2a} = y'_{1a}(c, y_{1a}, y_{2a}, y_{3a}, y_{4a}), \\
y'_{2a} &= 3.8945169 \cdot 10^{12} \cdot c^3 + 1.6207291 \cdot 10^2 \cdot y_{2a} - \\
&- 9.005908 \cdot 10^{-1} \cdot y_{4a} - 5.2977703 \cdot 10^6 = \\
&= y'_{2a}(c, y_{1a}, y_{2a}, y_{3a}, y_{4a}), \\
y'_{3a} &= y_{4a} = y'_{3a}(c, y_{1a}, y_{2a}, y_{3a}, y_{4a}), \\
y'_{4a} &= 1.296252 \cdot 10^{15} \cdot c^3 + 6.7398269 \cdot 10^4 \cdot y_{2a} - \\
&- 3.392141 \cdot 10^2 \cdot y_{4a} - 1.066108 \cdot 10^9 = \\
&= y'_{4a}(c, y_{1a}, y_{2a}, y_{3a}, y_{4a})
\end{aligned} \tag{13}$$

Усвајањем следећих познатих почетних услова:

$$y_{1a}(1.25 \cdot 10^{-3}) = \kappa_{1a}(1.25 \cdot 10^{-3}),$$

$$y_{2a}(1.25 \cdot 10^{-3}) = y'_{1a}(1.25 \cdot 10^{-3}) = \kappa'_{1a}(1.25 \cdot 10^{-3}),$$

$$y_{3a}(1.25 \cdot 10^{-3}) = \lambda_{1a}(1.25 \cdot 10^{-3}),$$

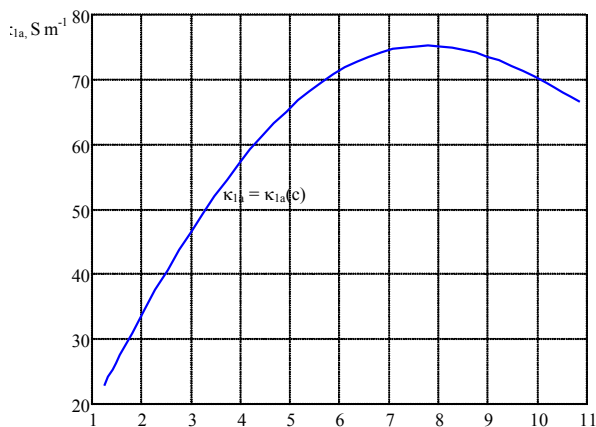
$$y_{4a}(1.25 \cdot 10^{-3}) = \lambda'_{1a}(1.25 \cdot 10^{-3}),$$

а затим решавањем система апроксимационих линеарних диференцијалних једначина првог реда (13) помоћу одговарајућих функција Матлаб рачунарских програмских пакета, добијају се тражене функције електричне и моларне проводљивости разматраног електролита, које сада износе $\kappa_{1a} = y_{1a}$ и $\lambda_{1a} = y_{3a}$, респективно. Њихове нумеричке вредности, дате су у табели 3. и одговарајућим графичким дијаграмима на сликама 4 и 5.

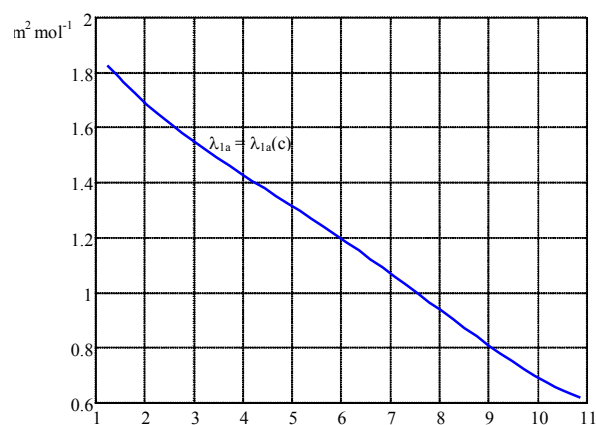
Табела 3 - Нумеричке вредности функција електричне и моларне проводљивости воденог раствора сумпорне киселине добијене решавањем система апроксимационих линеарних диференцијалних једначина првог реда (13).

$c, 10^{-3} \text{ mol m}^{-3}$	$\kappa_{1a} = y_{1a}, \text{ S m}^{-1}$	$\lambda_{1a} = y_{3a}, \text{ S} \cdot \text{m}^2 \text{ mol}^{-1}$
1.2500	22.9845	18251.89
1.3281	24.1358	18099.78
1.4062	25.2798	17951.21
1.4843	26.4164	17806.06
1.5624	27.5452	17664.19
1.8020	30.9563	17248.19
2.0415	34.2822	16858.54
2.2811	37.5149	16492.01
2.5207	40.6466	16145.52
2.7603	43.6702	15816.18
2.9999	46.5791	15501.29
3.2394	49.3672	15198.31
3.4790	52.0290	14904.90
3.7186	54.5593	14618.88
3.9582	56.9539	14338.29
4.1978	59.2086	14061.32
4.4374	61.3201	13786.34
4.6769	63.2855	13511.90
4.9165	65.1023	13236.76
5.1561	66.7689	12959.84
5.3957	68.2839	12680.22
5.6353	69.6465	12397.20
5.8749	70.8564	12110.25
6.1144	71.9140	11818.99
6.3540	72.8202	11523.27
6.5936	73.5761	11223.09
6.8332	74.1838	10918.64
7.0728	74.6457	10610.28
7.3124	74.9647	10298.57

7.5519	75.1442	9984.23
7.7915	75.1884	9668.19
8.0311	75.1016	9351.53
8.2707	74.8891	9035.52
8.5103	74.5564	8721.63
8.7498	74.1096	8411.50
8.9894	73.5555	8106.93
9.2290	72.9011	7809.92
9.4686	72.1543	7522.66
9.7082	71.3233	7247.52
9.9478	70.4169	6987.01
10.1873	69.4443	6743.88
10.3488	68.7564	6591.26
10.5103	68.0461	6448.78
10.6718	67.3167	6317.41
10.8333	66.5715	6198.18



Слика 4 - График функције електричне проводљивости воденог раствора сумпорне киселине добијен решавањем система апроксимационих линеарних диференцијалних једначина првог реда



Слика 5 - График функције моларне проводљивости воденог раствора сумпорне киселине добијен решавањем система апроксимационих линеарних диференцијалних једначина првог реда

Формирање апроксимационих линеарних диференцијалних једначина или њихових система за приближно одређивање електричне и моларне проводљивости воденог раствора сумпорне киселине, има велики значај и примену у пракси и истраживањима у области електрохемије. С тога се овом питању треба посветити посебна пажња. Ово је значајно тим пре, зато што до сада наведена и сличне проблематике нису решаване оваквим приступом и методама, а добијени резултати су веома прецизни и задовољавајући.

4. ЗАКЉУЧАК

Израчунавање електричне и моларне проводљивости воденог раствора сумпорне киселине помоћу формираних система апроксимационих линеарних диференцијалних једначина првог реда и применом одговарајућих рачунарских програма, има велику важност за праксу и истраживања у области електрохемије. Ово је значајно тим пре, зато што се овакав приступ и метод нису примењивали за решавање оваквих или сличних питања, а добијени резултати су приближни експерименталним и задовољавајући како за праксу, тако и за истраживања. Такође, добијени резултати приказани у виду нумеричких вредности променљивих таблично и графички, су веома прецизни, поуздани и добијају се за релативно кратко време, што оправдава примену апроксимационих линеарних диференцијалних једначина или њихових система за решавање оваквих или сличних питања.

На примеру разматраног електролита, добијени систем апроксимационих линеарних диференцијалних једначина састоји се од две једначине, и то обе другог реда. Међутим, њиховим свођењем на систем апроксимационих линеарних диференцијалних једначина првог реда, добија се систем који се састоји од четири јед-

начина првог реда и који се тек као такав може решити применом прилагођеног Матлаб рачунарског програма.

Наведени пример приближног израчунавања функција електричне и моларне проводљивости воденог раствора сумпорне киселине помоћу апроксимационих линеарних диференцијалних једначина првог реда, има општи значај. То значи, да се наведеним поступком и методом могу решавати и остала иста или слична питања.

5. ЛИТЕРАТУРА

- [1] И. Дорославачки, С. Ђорђевић, *Електрохемијске методе*, Рад, Београд, 1985.
- [2] А. Деспих, Д. Дражић, О. Татић-Јањић, *Основи електрохемије*, Научна књига, Београд, 1970.
- [3] М. Шушић, *Основи електрохемије и електрохемијске анализе*, Научна књига, Београд, 1980.
- [4] Е. Потер, *Електрохемија*, Школска књига, Загреб, 1968.
- [5] Г. Кортум, *Elektrochemia*, Варшава, 1966.
- [6] А. Тодоровић, Н. Ракићевић, Д. Минић, Карактеристике електролита секундарних хемијских извора електричне струје, *ОМО*, 4-5 / 207-217, Београд, 1999.
- [7] А. Тодоровић, Н. Ракићевић, Д. Минић, Одступања при одређивању приближних вредности функција електричне проводљивости електролита секундарних хемијских извора електричне струје, *ОМО*, 6-8 / 342-352, Београд, 1999.
- [8] Л. Ђаласан, М. Петковска, *Матлаб и додатни модули Control System Toolbox и Simulink*, Микро књига, Београд, 1996.
- [9] Цветковић М., Јанчић Р., Митраковић Д., *Математички програмски алати – Mathcad 5.0+, Matlab 4.0, Maple V 2.0, Mathematica 2.2*, Грифон, Београд, 1996.

SUMMARY

FORMATION OF APROXIMATIVE DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR ELECTRICAL AND MOLAR CONDUCTIVITY DETERMINATIONS OF SULFURIC ACID AQAEOUS SOLUTION

In this paper formation of linear differential equations for approximative determination of electrical and molar conductivity of sulfuric-acid solutions, has been give.